653. 位相幾何學ノ形式化(II)

寺阪　英孝（阪大）

§3. 今度ハ A^{acac} ナル operation ヲ考ヘヨウ. A^{acac} ハ $(A^a)^{cac}$ 即チ A ノ閉包ノ内部デアッテ, Kuratowski ノ所謂 ensemble régulier ouvert (Fund. Math. III) 又ハ domaine ouvert (Topologie I デ改稱) デアル、此処デハ前者ニ從ッテ正則開集合ト云フコトニスル。A^{acac} ハ長イカラ:

(定義) A^{acac} ヲ A^{ρ} トカキ, A ニ對スル正則開集合ト呼ブ。

先ヅ最初ニ

(13) $A^{\rho\rho}=A^{\rho}$

(証) $A^{acacaca}=A^{aca}$ (Kuratowski ノ等式) ヲ証スレバヨイ。コレハ (i) $A^{aca}\supset A^{ac}$ (公理 A_5) ニ C 及ビ a ヲ交互ニホドコシ $A^{acac}\subset A^{acc}=A^{a}\longrightarrow A^{acaca}\subset A^{aa}=A^{a}\longrightarrow A^{acacac}\supset A^{ac}\longrightarrow A^{acacaca}\supset A^{aca}$.
(ii) 又 $A^{acac\cdot a}\supset A^{acac}$ カラ同様ニ $A^{acacaca}\subset A^{aca}$.
ヨッテ等式ヲ得ル。———

次ニ

(14) $A\subset B\longrightarrow A^{\rho}\subset B^{\rho}$

(15) $(A+B)^{\rho}\supset A^{\rho}+B^{\rho}$

(16) $(AB)^{\rho}\subset A^{\rho}\cdot B^{\rho}$

ノ諸式モ a 及ビ C ノ operation デ譯無ク出セル。

次ニ $A^{\rho}=0$ ナル集合ヲ考ヘヨウ。

（定義） $A^{\rho}=0$ 即チ $A^{acac}=0$ ナル集合Aヲ<u>粗集合</u>（*nirgends dicht, non-dense*）ト云フ。

(14) カラ直グニ

(17) $A^{\rho}=0 \longrightarrow (AB)^{\rho}=0$ （粗集合ノ部分集合ハ粗）ガ出ル。更ニ

(18) $A^{\rho}=0 \rightarrow (A+B)^{\rho}=B^{\rho}$

(19) $A^{\rho}=0 \rightarrow (BA^{c})^{\rho}=B^{\rho}$ [即 $(A-B)^{\rho}=B^{\rho}$]

（集合ニ粗集合ヲ加ヘテモ引イテモ正則開集合ハ同ジニナル）

(証) (18) ノ証.

$$(A+B)^{acac} \underset{A_2}{=} (A^{a}+B^{a})^{cac} \underset{C_3}{=} (A^{ac}B^{ac})^{ac}$$

B^{ac} ハ開集合ナル故 (11) ノ U ヲ B^{ac} トシ A ヲ A^{ac} トスレバ

$$(A^{ac}B^{ac})^{a} \supset A^{aca}B^{ac}$$

ヨッテ両辺ノ c ヲトレバ $\supset$ ガ逆ニナッテ

$$(A^{ac}B^{ac})^{ac} \subset (A^{aca}B^{ac})^{c} = A^{acac}+B^{a}$$

$$\therefore\ (A+B)^{\rho} \subset A^{\rho}+B^{a} = B^{a}\ （仮定ニヨリ\ A^{\rho}=0）$$

$$\therefore\ (A+B)^{\rho} = (A+B)^{\rho\rho} \subset B^{a\rho} = B^{\rho}$$

然ルニ (14) カラ $(A+B)^{\rho} \supset B^{\rho}$

ヨッテ両者ハ等シイ。

(19) ノ証

$$B^{\rho} \underset{(4)}{=} (BA+BA^{c})^{\rho} \underset{(17),(18)}{=} (BA^{c})^{\rho} \text{ ——}$$

(17), (18) ノ系トシテ

(20) $A^{\rho}=0,\ B^{\rho}=0 \longrightarrow (A+B)^{\rho}=0,\ (AB)^{\rho}=0$

（粗集合ノ和、積ハ矢張リ粗デアル）

粗集合ノ例ハ閉集合カラソノ内部ヲ引イタ残リ，即チ $A^{a}-A^{acac}=A^{a}A^{aca}$ デアル。式デイフト

(21) $(A^{a}A^{aca})^{\rho}=0$ 又ハ $(A^{a}A^{\rho c})^{\rho}=0$

（閉集合ノ境界ハ粗デアル。）

（証） 一般ニ $(A^{a}B^{a})^{a}=A^{a}B^{a}$（閉集合ノ積ハ閉集合）ナコトガ証明出来ル。コレヲ使フト

$$(A^{a}A^{aca})^{acac}=(A^{a}A^{aca})^{cac}\underset{(10)}{=}A^{acac}A^{aca\cdot cac}$$

$$\underset{A_3}{=}0$$

Aナル集合ノ閉苞 A^{a} カラAノ内部 A^{cac} ヲ引イタモノ即チ $A^{a}-A^{cac}=A^{a}A^{ca}$ ガ粗デアルヨウナ集合Aヲ正則集合ト名ヅケコレヲ研究スルノデアルガ，ソノ為ニ先ヅ等式ヲ証明スル。

(22) $(A^{a}A^{c})^{\rho}=(A^{\rho}A^{c})^{\rho}=(A^{\rho}A^{ca})^{\rho}=(A^{a}A^{ca})^{\rho}$

$$=(A^{ca}A)^{\rho}=(A^{c\rho}A)^{\rho}=(A^{c\rho}A^{a})^{\rho}$$

（証）(i) $A^{a}\underset{(4)}{=}A^{a}(A^{aca}+A^{acac})\longrightarrow A^{a}A^{c}$

$$=A^{a}(A^{aca}+A^{\rho})A^{c}\subset A^{a}A^{aca}+A^{\rho}A^{c}$$

$$\xrightarrow[(21),(18)]{}(A^{a}A^{c})^{\rho}=(A^{\rho}A^{c})^{\rho}$$

(ii) A^{ρ} ハ閉ナル故(12)ニ於テ $U=A^{\rho}$, $A=A^{c}$ ト置ケバ

$$(A^{\rho}A^{c})^{a}=(A^{\rho}A^{ca})^{a}\longrightarrow(A^{\rho}A^{c})^{\rho}=(A^{\rho}A^{ca})^{\rho}$$

(iii) $A^{a}=A^{a}(A^{aca}+A^{acac})\longrightarrow A^{a}A^{ca}=A^{a}(A^{aca}+A^{\rho})A^{ca}$

$$\subset A^a A^{aca} + A^\rho A^{ca} \xrightarrow[(21),(18)]{} (A^a A^{ca})^\rho = (A^\rho A^{ca})^\rho$$

コレデ (22) ノ上ノ方ノ式ガ証明サレタ．サテ

$$A^a A^{ca} = (A^c)^{ca}(A^c)^a$$

ナル故，上式ノ A ノ代リニ A^c ヲ入レレバ下ノ方ノ式ガ出ル。

（定義） $(A^a A^{ca})^\rho = 0$ 即 $(A^a - A^{cac})^\rho = 0$

即チ A ノ閉苞カラ A ノ内部ヲ引イタ残ガ粗ナル如キ集合 A ヲ正則集合トイフ。(22) ノドレカ一ツガ 0 ナラバヨイ。特ニ $(A^a A^c)^\rho = 0$ ガ便利デアル。

任意ノ A ニツキ $0 \subset A^a \cdot A^{aca}$ ソレ故 (21) ニヨッテ $0^\rho = 0$ （0 ハ粗）、ヨッテ

(23) 閉集合，開集合，粗集合ハイヅレモ正則デアル。

$$A^a A^{ca} = (A^c)^{ca}(A^c)^a \quad ダカラ$$

(24) A ガ正則ナラバ A^c モ正則デアル。

(25) 正則集合ノ和、積ハ又正則デアル。式デハ

$$(A^a A^c)^\rho = 0,\ (B^a B^c)^\rho = 0 \to ((A+B)^a (A+B)^c)^\rho = 0$$
$$((AB)^a (AB)^c)^\rho = 0$$

(証) $(A+B)^a (A+B)^c = (A^a + B^a) A^c B^c \subset A^a A^c + B^a B^c$

及ビ $(AB)^a (AB)^c \subset A^a B^a (A^c + B^c) \subset A^a A^c + B^a B^c$

カラ (20) ニヨッテ出ル。

次ニ両集合 A, B ニ対スル正則開集合 A^ρ, B^ρ ガ等シイ為ノ条件ヲ出サウ。先ヅ

(26) $(AB^c)^\rho = 0 \longrightarrow A^\rho \subset B^\rho$

(証) $(AB^c)^\rho = 0 \longrightarrow A^\rho \underset{(4)}{=} (A(B+B^c))^\rho$

$$= (AB+AB^c)^\rho \underset{(18)}{=} (AB)^\rho \subset B^\rho$$

コレヨリ直チニ

(27) $(AB^c)^\rho = 0,\ (BA^c)^\rho = 0 \longrightarrow A^\rho = B^\rho$

集合ガ特ニ正則ナラバ、コノ逆モ成立ツノデアル。先ヅ

(28) $A^\rho \subset B^\rho,\ (B^\alpha B^{c\alpha})^\rho = 0$ (Bガ正則)

$$\longrightarrow (AB^c)^\rho = 0$$

(証) $(AB^c)^\rho \underset{(16)}{\subset} A^\rho B^{c\rho}$ ($A^\rho \subset B^\rho$ ナル故) $\subset B^\rho B^{c\rho}$

$$\underset{(10)}{=} (B^\alpha B^{c\alpha})^\rho = 0$$

ソレ故 A, B ガ共ニ正則ナラバ (27) ノ逆ガ成立ツ。即チ

(29) $A^\rho = B^\rho$, 且ツ A, B ハ正則 $\longrightarrow (AB^c)^\rho = 0,$

$(BA^c)^\rho = 0$

又 A, B ガ正則デ $A^\rho = B^\rho$ ナラバ (29)ガ成立シ，従ッテ $((A^c)^c B^c)^\rho = 0,\ ((B^c)^c A^c)^\rho = 0$ トナル故更ニ (27) ヲ適用スレバ $(A^c)^\rho = (B^c)^\rho$ トナル、即チ

(30) $A^\rho = B^\rho$ 且ツA, Bハ正則 $\longrightarrow A^{c\rho} = B^{c\rho}$

(27) ト (29) ヲ用井レバ，更ニ

(31) $A^\rho = B^\rho$, A, B ハ正則. C ハ任意 $\longrightarrow (A+C)^\rho$

$$= (B+C)^\rho, \quad \longrightarrow (AC)^\rho = (BC)^\rho.$$

証明スルニハ $((A+C)(B+C)^c)^\rho = 0,\ ((B+C)(A+C)^c)^\rho = 0$ 等ヲ出シテ見レバヨイノデアル。

§4. コノ§デハ正則集合許考ヘルコトニスル。今記号トシテ

A, B ガ正則デ $A^\rho = B^\rho$ ノトキ $A \approx B$

ト書クコトニスルト，$0^\rho = 0$ ナル故（証略）

$A^\rho = 0$ ハ $A \approx 0$

ト書ケル。コノ記号ヲ用キルト (27), (29), (30), (31) ハ夫々

$(27)^*$ $AB^c \approx 0,\ BA^c \approx 0 \longrightarrow A \approx B$

$(29)^*$ $AB^c \approx 0,\ BA^c \approx 0 \longleftarrow A \approx B$

$(30)^*$ $A \approx B \longrightarrow A^c \approx B^c$

$(31)^*$ $A \approx B \longrightarrow A+C \approx B+C,\ AC \sim BC$

ト書ケル. $(31)^*$ ハ尚一般ニ

(32) $A \approx B,\ C \approx D \longrightarrow A+C \approx B+D,\ AC \approx BD,$

$\approx$ ハ斯様ニシテ $=$ ト同様ノ性質ヲ持ツ譯デアル。

以上ノコトヲ利用シテ最初ノ問題ヲ考ヘテ見ヨウ。今正則開集合（$A^\rho = A$）ノミヲ採用スルコトトシ，ソレニツキ正則和ナルモノヲ次ノ様ニ定義スル。

$$A \oplus B = (A+B-AB)^\rho = ((A+B)(AB)^c)^\rho$$

即チ

(33) $A \oplus B = (AB^c + BA^c)^\rho$

コウ定義シテカラ $\oplus$ ナル加法ガ *associative* デアルコトヲ証明シテ見ヨウ。即チ次式ヲ証明スルノデアル。

(34) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

コノ左辺ハ

$$(A \oplus B) \oplus C = \{(AB^c + BA^c)^\rho C^c + (AB^c + BA^c)^{\rho c} C\}^\rho$$

ニ等シイ。今

$$AB^c + BA^c = D$$

ト置ケバ

$$(A \oplus B) \oplus C = (D^\rho C^c + D^{\rho c} C)^\rho$$

トナル。サテ A, B, C ハイヅレモ正則ナル故、定理 (24) ニヨッテ A^c, B^c, C^c モ正則、従ッテ定理 (25) ニヨッテ D モ亦然リ、D^ρ ハ勿論ノ事デアル、ヨッテ

$$D^{\rho\rho} = D^\rho \quad [(13)] \quad \text{即チ} \quad D^\rho \approx D$$

カラ $(30)^*$, $(31)^*$, (32) ニヨッテ

$$D^\rho C^c + D^{\rho c} C \approx DC^c + D^c C$$

即チ、左辺ノ ρ ヲトッタモノハ右辺ノ ρ ヲトッタモノニ等シイ。由ッテ

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \oplus C &= \{(AB^c + BA^c) C^c + (AB^c + BA^c)^c C\}^\rho \\ &= (AB^c C^c + BA^c C^c + CA^c B^c + ABC)^\rho\end{aligned}$$

コレカラ容易ニ (34) ノ等式ガ出セル譯デアル。

$$(A \oplus B) C = AC \oplus BC$$

ナル分配律モ成立スルガ証明ハ略ス。

以上デ初メノ目的ハ達シタガ、コレダケデ店仕舞トスルノハ惜シイ。

コノ次ハ A^{acaca} ナル *operation* ト所謂 *Baire* ノ性質トノ関係等ヲ出サウト思フ。